Grafos

Agustín Gutiérrez

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Training Camp 2014

Contenidos

DFS

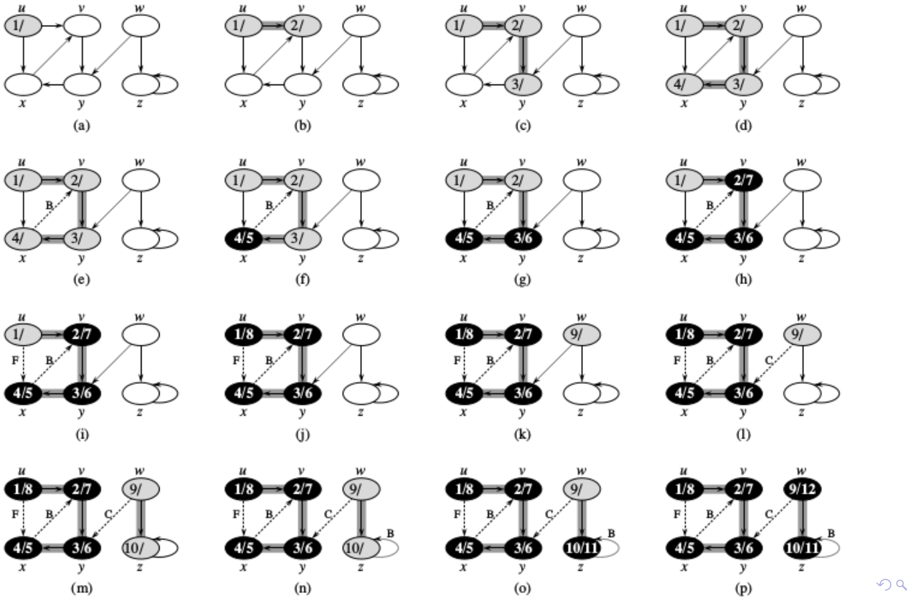
- "*Depth-first search yields valuable information about the structure of a graph.*"

  Introduction to Algorithms, Cormen et al.
- A diferencia del BFS, que suele utilizarse con la misión específica de resolver el problema de caminos mínimos desde un origen s, el algoritmo de DFS suele usarse para obtener información útil sobre el grafo en sí, que puede ser luego utilizada por algoritmos posteriores.

Idea general

- La idea del DFS consiste en recorrer el grafo caminando por las aristas, utilizando siempre las aristas disponibles (aún no utilizadas) del último nodo descubierto.
- Para visualizar más fácil la ejecución del algoritmo, es conveniente pensar en que los nodos se pintan de tres colores: **Blanco, Gris y Negro**.
- Los nodos inician todos pintados de blanco.
- Al descubrir un nodo y comenzar a procesarlo, se lo pinta de **gris**. Mientras haya nodos **blancos**, se hace una exploración de DFS desde cualquier nodo **blanco**.
- Desde el nodo actual en procesamiento, se exploran las aristas salientes, y si alguna llega a un nodo **blanco** nuevo, se pinta de **gris** y se sigue explorando desde allí recursivamente.
- Luego de considerar y eventualmente recorrer todas las aristas de un nodo, se completa su procesamiento y se pinta de **negro**, volviendo la recursión a su **padre**.

Ejemplo


u v w x y z
1/
(a)
1/ 2/
(b)
1/ 2/ 3/
(c)
1/ 2/ 4/ 3/
(d)
1/ 2/ B 4/ 3/
(e)
1/ 2/ B 4/5 3/
(f)
1/ 2/ B 4/5 3/6
(g)
1/ 2/7 B 4/5 3/6
(h)
1/ 2/7 F B 4/5 3/6
(i)
1/8 2/7 F B 4/5 3/6
(j)
1/8 2/7 9/ F B 4/5 3/6
(k)
1/8 2/7 9/ F B C 4/5 3/6
(l)
1/8 2/7 9/ F B C 4/5 3/6 10/
(m)
1/8 2/7 9/ F B C B 4/5 3/6 10/
(n)
1/8 2/7 9/ F B C B 4/5 3/6 10/11
(o)
1/8 2/7 9/12 F B C B 4/5 3/6 10/11
(p)

Paréntesis

- Además, es muy útil para razonar sobre el algoritmo, y para utilizar en algoritmos posteriores, asociar a cada nodo dos "timestamps":
- Un primer timestamp $d[i]$, que para cada nodo i, indica el tiempo en que fue **descubierto** (se pintó de gris).
- Un segundo timestamp $f[i]$, que para cada nodo i, indica el tiempo en que fue **terminado** (se pintó de negro).
- El timestamp es simplemente una variable global, por ejemplo que comienza en 0 y se incrementa hasta $2n$ durante la ejecución del algoritmo.
- Nos permite ordenar los $2n$ eventos de descubrimiento y finalización de un nodo de manera total en el tiempo.

Paréntesis (continuado)

- Una propiedad muy importante y útil para razonar, es que los tiempos de finalización y terminación de los distintos nodos presentan **estructura de paréntesis**.
- Es decir, si armamos un string de longitud $2n$ con paréntesis que abren en las posiciones $d[i]$ y paréntesis que cierran en las $f[i]$, tendremos una cadena bien parenteseada.
- Por ejemplo, una propiedad muy importante es que un descendiente de un nodo en un arbol de dfs, necesariamente tiene sus parentesis contenidos en el de su ancestro.

Clasificación de las aristas

El algoritmo de DFS nos induce una clasificacion de aristas en 4 tipos:

- **Tree edge**
  - Viaja a un nodo blanco
  - Es con la que se descubre un nodo por primera vez
  - Viaja al **hijo** del nodo actual en un árbol de DFS
- **Back edge**
  - Viaja a un nodo gris
  - Viaja a un **ancestro** del nodo actual
- **Forward edge**
  - Viaja a un nodo negro con descubrimiento posterior al nodo actual
  - Viaja a un **descendiente** (no hijo) del nodo actual
  - *Solo aparece en grafos dirigidos*
- **Cross edge**
  - Viaja a un nodo negro que finaliza antes que el descubrimiento del nodo actual
  - No viaja ni a un ancestro ni a un descendiente
  - *Solo aparece en dirigidos*

Observaciones útiles

- Los descendientes de un nodo x serán exactamente los nodos blancos alcanzables por un camino de nodos blancos con origen en x, en el instante en que se descubre (*white-path-theorem*).
- Un grafo es acíclico (dirigido o no) si y solo si un recorrido de DFS no encuentra ninguna back-edge.
- El dfs genera un spanning forest (dfs-forest), donde cada árbol está formado por las tree-edges.
- Si el grafo es no dirigido, el DFS construye un dfs-forest con un spanning tree de cada componente conexa.
- Si el grafo es dirigido, no hay una relación clara entre los árboles del dfs-forest y las "componentes" del grafo original.

Observaciones útiles (¡Más!)

- Las back-edges siempre están involucradas en un ciclo (concretamente, el que se completa con las tree edges que bajan en sentido inverso)
- Las cross-edges forman un subgrafo acíclico (ya que por definición, siempre van de un nodo a otro con un tiempo de finalización menor)
- Topological sort: Es tomar los vertices en orden inverso de finalizacion, gracias a que:

$$a \to b \Rightarrow f[a] > f[b]$$

Problema atacable con DFS

- Un grafo dirigido es *singly-connected* si existe a lo sumo un camino entre cada par de nodos. Dar un algoritmo $O(|V||E|)$ para decidir si un grafo es *singly-connected*.

Problema atacable con DFS

- Un grafo dirigido es *singly-connected* si existe a lo sumo un camino entre cada par de nodos. Dar un algoritmo $O(|V||E|)$ para decidir si un grafo es *singly-connected*.
- Solución: Un grafo es *singly-connected* si y solo sí al correr un dfs desde cada nodo, nunca aparecen **forward edges** ni **cross edges** (dentro de un mismo DFS-tree).

Tarea

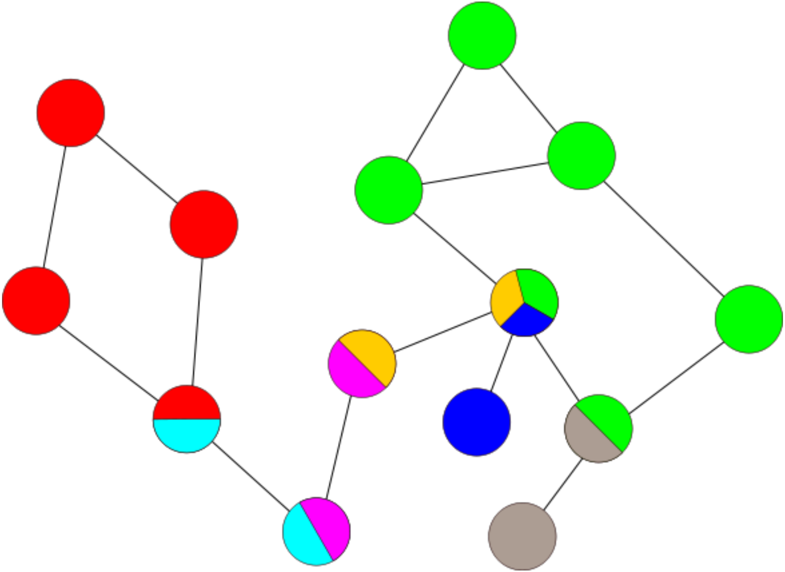
Para pensar en el hogar:

- En un grafo dirigido, dar el vertice mas chico alcanzable por cada vertice, en tiempo lineal, es decir, $O(|V| + |E|)$.

Definiciones

- En un grafo no dirigido, un **punto de articulación** es un **nodo** tal que al removerlo del grafo, la cantidad de componentes conexas aumenta.
- En un grafo no dirigido, un **puente** es un **eje** tal que al removerlo del grafo, la cantidad de componentes conexas aumenta.
- Un grafo no dirigido es **biconexo** si es conexo y no tiene puntos de articulación.
- En un grafo no dirigido, una **componente biconexa** es un subgrafo biconexo maximal.

Dibujito



Observaciones

- Los puentes vienen a ser componentes biconexas de 2 nodos.
- Las componentes biconexas **no particionan los nodos** (a diferencia de las componentes conexas).
- Las componentes biconexas **particionan las aristas** de grafo.

Cálculo mediante DFS

- La idea central es computar mediante recursión durante el recorrido del DFS, un valor *low*[*i*] que para cada nodo, indique la menor distancia de la raíz del árbol de DFS actual a la que es posible saltar, desde alguna parte del sub-arbol de DFS con raíz en *i*.
- Este valor puede computarse simplemente como el mínimo entre el *low* de los hijos del nodo actual, y la profundidad mínima a la que llega una back-edge que sale del nodo actual.

Cálculo mediante DFS (puentes)

- Observación: Un tree-edge del nodo *k* a uno de sus hijos *x* es puente si y solo sí, $low[x] >= depth[x]$, es decir, no existe ningún back-edge que permita salir del subarbol con raíz en *x*.
- Observación: Un back-edge nunca puede ser puente.

Cálculo mediante DFS (nodos)

- Observación: La raíz de un árbol de DFS es un punto de articulación si y solo sí tiene más de un hijo.
- Observación: Un nodo x distinto de la raíz es punto de articulación, si y solo sí, para alguno de sus hijos y, se cumple $low[y] >= depth[x]$.

Cálculo mediante DFS (componentes biconexas)

- Para calcular las componentes biconexas, basta agregar una pila al DFS anterior:
- Cada vez que recorremos una arista, agregarla a la pila.
- Cada vez que volvemos de una llamada recursiva por un eje x, y, con x padre de y, chequeamos si ahí termina una componente biconexa, es decir, $low[y] >= depth[x]$
- Si ese es el caso, desapilamos aristas hasta desapilar la arista x, y, que fue la primera que pusimos al bajar y marca el comienzo de la componente. Todas esas forman la componente biconexa.

Referencias

- *Introduction to Algorithms, 2nd Edition*. MIT Press.
  Thomas H. Cormen
  Charles E. Leiserson
  Ronald L. Rivest
  Clifford Stein
  Sección 22 (DFS y temas relacionados)

¿Preguntas?